Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 2

TD – Utilisation des transformations infinitésimales en thermodynamique

I Vrai-faux/questions courtes ⋆ | [• ○ ○]

1 - On considère un système fermé dont l'énergie cinétique et de pesanteur ne varie pas entre les instants initial et final. Il reçoit du travail uniquement de la part des forces de pression. Dans chacun des cas suivants, écrire l'expression de $\mathrm{d}U$ et de $\mathrm{d}S$ tels que donnés par l'application des premier et second principe :

- la transformation est adiabatique ;
- la transformation est adiabatique et réversible ;
- la transformation est isochore.

2 - Rappeler la première identité thermodynamique. À partir de celle-ci, démontrer la seconde identité $\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p$.

II Évolution de la température dans une salle de classe ⋆ | [• ○ ○]

On veut étudier le chauffage et le refroidissement d'une salle de classe lors d'une froide journée d'hiver. Soit T_{ext} la température de l'air extérieur et T la température de la classe (supposée uniforme). On note C la capacité calorifique totale de la salle de classe.
Lors d'une évolution infinitésimale entre les temps t et $t + \mathrm{d}t$, la salle reçoit une quantité de chaleur δQ, et la température de la salle passe de T à $T + \mathrm{d}T$.
L'isolation de la salle n'étant pas parfaite, on suppose qu'elle perd une chaleur, pendant un temps $\mathrm{d}t$, donnée par l'expression $\delta Q_{\text{perdue}} = aC(T - T_{\text{ext}})\mathrm{d}t$.
On prendra $T_{\text{ext}} = 5°\text{C}$, $C = 5.0 \times 10^6\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$, $|a| = 8.0 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$.

1 - Quel doit être le signe de a pour que l'expression de δQ_{perdue} soit cohérente ?

La température de la salle est $T_0 = 25°\text{C}$. On arrête le chauffage à l'instant $t = 0$.

2 - **a -** En appliquant le premier principe entre t et $t+\mathrm{d}t$, déterminer l'équation différentielle suivie par $T(t)$.

b - Résoudre cette équation différentielle.

c - Quelle est la température dans la salle au bout de 2h de cours ?

Cette fois, le chauffage est allumé. Il fournit à la salle une puissance P_c.

3 - **a -** Quelle est l'expression de la chaleur reçue par la salle entre t et $t+\mathrm{d}t$ de la part du chauffage ?

b - Déterminer l'équation différentielle suivie par $T(t)$.

c - La résolution de cette équation est très similaire à celle de la question 2, et nous n'allons pas le refaire. Au lieu de ça, utiliser cette équation pour donner l'expression de la température dans la pièce au bout d'un temps long.

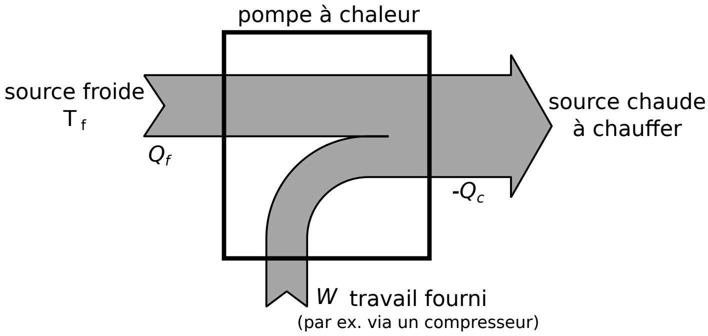
d - Quelle doit être la puissance fournie par le chauffage pour que $T(t)$ tende vers $T_\infty = 25°\text{C}$?

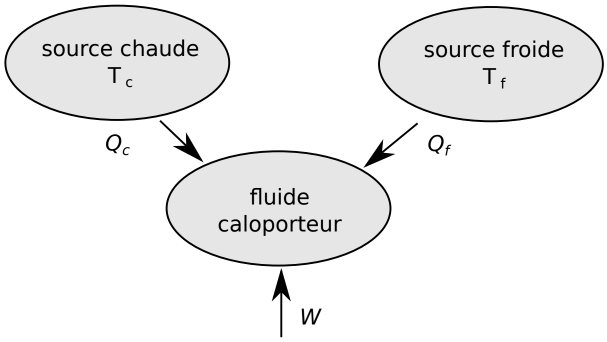
III Étude d'une pompe à chaleur ⋆ | [• • ○]

Nous étudions le fonctionnement d'une pompe à chaleur. On trouve de tels dispositif dans les maisons. Une pompe à chaleur a alors pour but de prélever de la chaleur à l'air extérieur (qui constitue la source froide) pour échauffer l'intérieur de la maison (qui constitue la source chaude). (On peut dire que la machine "pompe de la chaleur" à la source froide pour la donner à la source chaude.)

Ce transfert d'énergie thermique de la source froide vers la source chaude n'est évidemment pas spontané. Il nécessite donc un apport de travail.

La pompe fonctionne en faisant circuler un fluide caloporteur (c'est-à-dire qui a de bonnes propriétés thermiques) entre les deux sources. Lors d'un cycle, ce fluide reçoit un transfert thermique Q_c de la source chaude à la température T_c, Q_f de la source froide à la température T_f (par exemple à travers des échangeurs thermiques), et reçoit un travail W (par exemple en étant comprimé dans un compresseur).





Modèle avec des thermostats

1. **a -** Pour un fonctionnement normal, indiquer quels sont les signes de W, Q_c et Q_f.

   b - D'après le paragraphe introductif, quelle est la grandeur utile et la grandeur coûteuse lors du fonctionnement de la pompe à chaleur ?

   En déduire l'expression de l'efficacité ϵ de la pompe en fonction de grandeurs parmi W, Q_c et Q_f.

2. On suppose dans un premier temps que les sources chaudes et froides sont des thermostats. On suppose également que l'évolution lors d'un cycle est réversible.

   a - D'après la définition d'un thermostat, qu'est ce que cela implique sur les température T_f et T_c ?

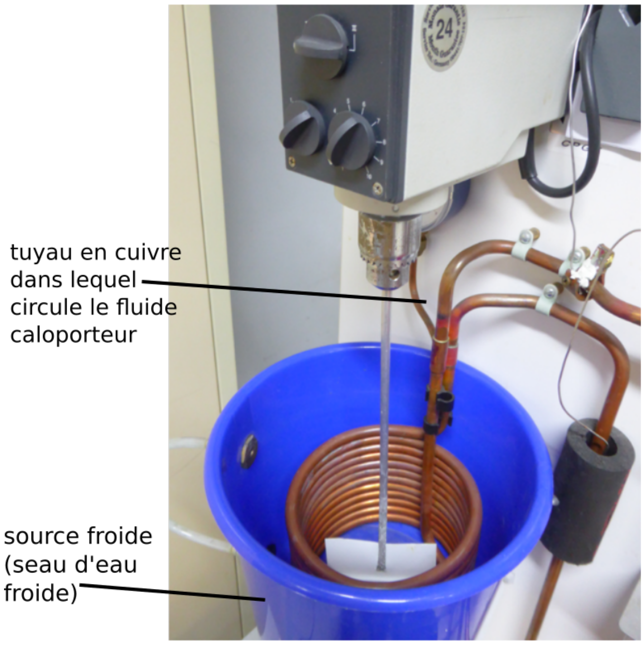
   b - Rappeler l'expression de l'entropie échangée lors d'un transfert thermique reçu $Q_{\text{reçue}}$ avec un thermostat à la température T_0.

   c - En écrivant le premier et le second principe lors d'un cycle, exprimer l'efficacité ϵ de la machine en fonction de T_c et de T_f uniquement.

   Faire l'application numérique avec par exemple $T_f = 10°\text{C}$ et $T_c = 20°\text{C}$.

Modèle avec des pseudo-sources

On étudie maintenant une pompe à chaleur de démonstration dans un laboratoire. Elle fonctionne entre deux sources de chaleur (une chaude, une froide) qui ne sont pas assez grandes pour être considérées comme des thermostats.
La source froide est constituée d'un seau d'eau froide à la température $T_f(t)$, qui vaut initialement $T_{f0} = T_f(0) = 10°\text{C}$. Le fluide caloporteur passe dans un serpentin qui est immergé dans l'eau, ce qui entraîne donc un échange thermique entre l'eau à la température T_f et le fluide.
De même, la source chaude est constituée d'un autre seau d'eau chaude à la température $T_c(t)$, qui vaut initialement $T_{c0} = T_c(0) = 25°\text{C}$, avec également un serpentin dans lequel circule le fluide caloporteur.



Il va donc falloir reprendre l'étude pour prendre en compte le refroidissement de la source froide et le réchauffement de la source chaude au cours du temps.
On note $T_c(t)$ la température de la source chaude en fonction du temps t, et $T_{c0} = T_c(0) = 25°\text{C}$. De même, $T_f(t)$ est la température de la source froide, et $T_{f0} = T_f(0) = 10°\text{C}$. Chaque seau contient $m = 4\,\text{kg}$ d'eau, de capacité thermique massique $c = 4.2 \times 10^3\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
Le fonctionnement est encore supposé réversible.
Comme les températures des sources chaude et froide évoluent, on ne peut plus calculer l'entropie échangée reçue par le fluide comme étant $S_\text{e} = Q_f/T_f + Q_c/T_c$. On peut toutefois le faire si l'on considère un cycle infinitésimal, c'est-à-dire une circulation du fluide entre les temps t et $t+\text{d}t$, tel que pendant ce cycle :

- la température de la source chaude est constante égale à $T_c(t)$, et celle de la source froide constante égale à $T_f(t)$.
- Le fluide échange une quantité de chaleur δQ_c avec la source chaude, δQ_f avec la source froide.
- Le fluide reçoit un travail δW.

3. Appliquer le premier principe et le second principe au fluide caloporteur lors d'un cycle infinitésimal.

4. **a -** Exprimer le transfert thermique δQ_f reçu par le fluide caloporteur de la part de la source froide en fonction de m, c, et $\text{d}T_f$ où $\text{d}T_f$ est la variation élémentaire de la température de la source froide.

b - Exprimer le transfert thermique δQ_c reçu par le fluide caloporteur de la part de la source chaude en fonction de m, c, et $\text{d}T_c$ où $\text{d}T_c$ est la variation élémentaire de la température de la source chaude.

5. **a -** En déduire la relation $\dfrac{\text{d}T_f}{T_f} + \dfrac{\text{d}T_c}{T_c} = 0$.

b - Déduire de la relation précédente que le produit $T_c(t)\,T_f(t)$ est constant au cours du temps. (Indice : utiliser le fait que pour une grandeur $A > 0$, $\frac{\text{d}A}{A} = \text{d}(\ln A)$.)

6. **a -** Au cours du temps, est-ce que $T_c(t)$ va augmenter ou diminuer ? Même question pour $T_f(t)$.

b - On définit l'efficacité à l'instant t comme $\epsilon = -\dfrac{\delta Q_c}{\delta W}$. On peut alors montrer, exactement comme à la question 2.c, que $\epsilon(t) = \dfrac{T_c(t)}{T_c(t) - T_f(t)}$.
L'efficacité va-t-elle augmenter ou diminuer au cours du temps ?

IV Déterminer une équation d'état [● ○ ○]

On considère un gaz de photons. On voudrait trouver une relation entre T et p pour ce gaz. Une étude théorique permet de montrer que l'énergie interne d'un volume V de ce gaz est donnée par l'expression

$$U(S,V) = \alpha S^{4/3} V^{-1/3},$$

où α est une constante. On souhaite donc poursuivre l'étude théorique en déterminant une équation d'état qui relie T et p.

1 - Donner l'expression de la température et de la pression de ce gaz.

2 - En déduire une équation d'état qui relie T et p (et qui ne fait plus intervenir V et S) pour un gaz de photons.

V Démonstration de la loi de Laplace [● ● ○]

1 - Rappeler la loi de Laplace et ses conditions d'application.

2 - À partir de cette loi, démontrer ses "variantes" : $TV^{1-\gamma} = \mathrm{cst}'$ et $T^{\gamma}p^{1-\gamma} = \mathrm{cst}''$.

On cherche maintenant à démontrer cette loi. On considère donc n moles de gaz, que l'on modélise comme un gaz parfait d'exposant adiabatique γ. On suppose que ce système fermé subit une évolution entre un état A et un état B, où seules les forces de pression interviennent.
On découpe cette évolution en une série d'évolutions infinitésimales.

4 - Écrire le premier principe pour une évolution infinitésimale. Le simplifier en utilisant les hypothèses adiabatique et réversible.

5 - Le fait d'avoir un gaz parfait permet d'écrire $\mathrm{d}U$ d'une certaine manière. Le faire. On utilisera l'expression $C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$.

6 - Enfin, en utilisant la loi des gaz parfaits, aboutir à l'expression $V\mathrm{d}p = -\gamma p \mathrm{d}V$.

7 - Il faut ensuite intégrer cette équation. On le fera en plaçant les p d'un coté et les V de l'autre (on sépare les variables). On arrive alors à l'expression de la loi de Laplace $p_A V_A^{\gamma} = p_B V_B^{\gamma}$.

VI Démonstration de la relation de Mayer [● ○ ○]

(exercice facultatif)

La relation de Mayer pour n moles d'un gaz parfait s'écrit $C_p - C_v = nR$.

1 - Démontrer cette relation en utilisant : la définition de H en fonction de U, p et V ; la lois des gaz parfaits ; la définition de C_p et de C_V en fonction de H ou de U pour un gaz parfait.

On utilise souvent les expressions $C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$ et $C_p = \dfrac{\gamma nR}{\gamma - 1}$. Elles sont en fait des conséquences de la définition de $\gamma = C_p/C_V$ et de la relation de Mayer $C_p - C_V = nR$.

2 - Démontrer ces deux expressions.

VII Démonstration pour l'entropie de la phase condensée [● ○ ○]

(exercice facultatif)

L'expression pour la variation élémentaire de l'entropie d'une phase condensée incompressible indilatable de capacité thermique C est $\mathrm{d}S = C\dfrac{\mathrm{d}T}{T}$.

1 - Démontrer cette relation en utilisant la première identité thermodynamique, et l'expression de $\mathrm{d}U$ pour une phase condensée incompressible indilatable.

2 - En déduire qu'entre deux états A et B, on a $S_B = S_A + C\ln\dfrac{T_B}{T_A}$.